آموزشی

هوشنگ شرقی

۲

استدلال استقرایی و استقرای ریاضی

اشاره

در شمارهٔ قبل، در مورد ساختارهای استقرایی و استدلال استقرایی گفتیم و مثال‌هایی آوردیم. در خاتمه این پرسش را مطرح کردیم که: آیا الگوهای استقرایی که کشف می‌کنیم (حدس می‌زنیم)، همواره معتبر هستند؟ یعنی آیا تا بی‌نهایت آن الگو ادامه می‌یابد؟

با یک مثال تاریخی شروع می‌کنیم: **لئونارد اویلر** (۱۷۸۳-۱۷۰۷)، ریاضی‌دان مشهور سوئیسی، می‌گوید: «من هیچ استدلال دیگری به جز استقرای طولانی ندارم. آزمایش‌های طولانی که انجام داده‌ایم، شکی در صحت قانون باقی نگذاشته است و... به نظر می‌رسد وقتی قانونی مثلاً برای ۲۰ مورد متوالی آن صحیح باشد، غیرممکن است برای موارد بعدی نادرست از آب درآید.»

همین شخص زمانی حدس زد که تابع $f(n)=n^۲+n+۴۱$ به ازای همهٔ اعداد طبیعی، همیشه دارای مقداری است که یک عدد اول است.

حدس او به ازای تمام اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰ درست است:

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	…	۲۰	۲۱	…
f(n)	۴۳	۴۷	۵۳	۶۱	۷۱	۸۳	…	۴۶۱	۵۰۳	…

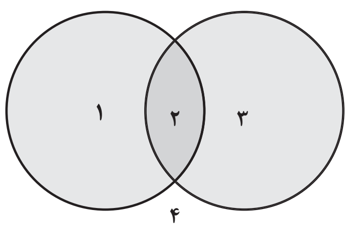
و چنانچه ملاحظه می‌کنید، همهٔ اعداد ردیف زیرین، عددهای اول هستند. ولی آیا آن‌گونه که او ادعا می‌کرد، می‌توان نتیجه گرفت که همهٔ عددهای بعدی هم عددهای اول هستند؟ آزمایش نشان می‌دهد که لااقل به ازای $n=۴۱$ چنین نیست:

$$n=۴۱$$
$$\Rightarrow n^۲+n+۴۱=۴۱^۲+۴۱+۴۱=۴۱(۴۱+۱+۱)$$
$$=۴۱\times ۴۳$$

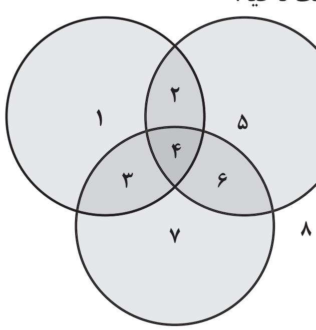
یعنی $f(۴۱)$ عددی اول نیست. (چرا؟) حتی به ازای $n=۴۰$ هم حاصل عددی مرکب است:

$$f(۴۰)=۴۰^۲+۴۰+۴۱=۴۰(۴۰+۱)+۴۱$$
$$=۴۰\times۴۱+۴۱=۴۱(۴۰+۱)=۴۱\times۴۱$$

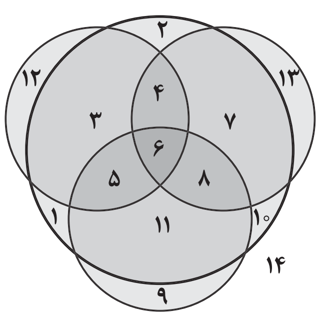
این‌گونه حدس‌های استقرایی نادرست بسیارند. بعضی از آن‌ها خیلی زود باطل می‌شوند و بعضی دیرتر. مثلاً می‌دانیم هر دایره، صفحه را به دو ناحیه (درون و بیرون دایره) تفکیک می‌کند. دو دایره نیز صفحه را به حداکثر چهار ناحیه تفکیک می‌کنند:



و سه دایره، به هشت ناحیه:



اکنون شاید حدس بزنیم که n دایره، صفحه را به حداکثر ۲^n ناحیه تفکیک می‌کنند، ولی این حدس با رسم چهار دایره، بلافاصله باطل می‌شود!



یعنی دایرهٔ چهــارم اگر همهٔ دایره‌ها را قطع کند، حداکثر نواحی که ۱۴ ناحیه اســت، ایجاد می‌شــود. در واقع حدس درست به‌صورت ۲^n ناحیه نیســت، بلکه $n^۲-n+۲$ ناحیه است! (که به ازای $n=۱,۲,۳,۴$ جواب درست را به ما می‌دهد.)

اما از کجا می‌توانیم مطمئن شویم این حدس همواره درست است و هیــچ مثال نقضی برای آن پیدا نخواهد شــد؟ به‌عبارت دیگر، برای اثبات درستی یک حدس استقرایی، چه شرایطی لازم است؟

داستان حکیم فرزانه و نسخهٔ عمر جاودانی!

بشر از هنگامی که خود را شناخته است و تاریخ آن نشان می‌دهد، همواره به دنبال دارو یا معجزه‌گری بوده که آب حیات یا نســخهٔ عمر جاودانی باشد. در روزگاران کهن گفته می‌شد که پیری دانا در بلندای کوهی زندگی می‌کند و نســخهٔ عمر جاودان دارد. جوانی برای یافتن این نســخه رنج سفر را بر خود هموار کرد و به هر زحمتی بود خود را به منزل پیر خردمند رساند. از او پرسید که آیا شایعهٔ وجود نسخهٔ عمر جاودان درست است یا خیر. حکیم فرزانه گفت: «آری و تنها دو شرط دارد: اول، از امروز فقط جملات راســت به زبان بیاوری، و دوم، بگویی که فردا هم همین حرف‌ها را تکرار می‌کنی!»

جــوان کمی فکر کرد و بعد لبخندی زد و گفت: «آری اگر بتوانم این دو کار را بکنم، عمر جاودان خواهم داشت!»

اما چرا؟ واضح اســت که اگر جوان از امروز راســت بگوید و بگوید که فردا هم همین حرف را خواهد زد، یعنی تا فردا زنده خواهد بود و فــردا هم همین حرف‌ها را تکرار خواهد کرد. پس تا پس‌فردا هم زنده خواهد بود و الی آخر! پس او نمی‌تواند چنین تضمینی بدهد! اما جملهٔ حکیم درست است، زیرا گفت: «اگر بتوانی... .»

حدس‌های اســتقرایی ســاختمانی بســیار شــبیه به این دارند. یعنی اگر حکمی که شــامل یک مجهول با دامنهٔ اعداد طبیعی است $(n\in N)$(۱)، به ازای $n=۱$ درست باشد و (۲) با فرض درستی به ازای $n=k$ بتوان تضمین کرد که به ازای $n=k+۱$ هم درســت است، آن‌گاه این حکم برای هر عدد طبیعی دلخواه n نیز درســت اســت. درستی این موضوع بدیهی اســت، زیرا اگر به موجب بند (۱) حکم برای $n=۱$ درست باشد، به موجب بند (۲) برای $n=۲$ هم درست است و در نتیجه (باز به موجب بند (۲)) برای $n=۳$ نیز درست خواهد بود و الی آخر.

درســتی این قضیه را به‌صورت منطقی هم می‌تــوان به دقت (با استدلال استنتاجی) ثابت کرد:

قضیـــه: اگر $p(n)$ حکمی (گزاره‌ای) باشــد کــه در آن، $n\in N$ و $p(۱)$ درست باشد و با فرض درستی $p(k)$، $p(k+۱)$ هم درست باشد، آن‌گاه $p(n)$ برای هر $n\in N$ درست است.

اثبــات (برهــان خلــف): فــرض کنیــم $p(n)$ بــه ازای بعضــی اعــداد طبیعــی نادرســت باشــد. کوچک‌تریــن ایــن اعــداد را a می‌نامیــم. بدیهــی اســت کــه $a\neq ۱$ (چــرا؟) پــس: $a\geq ۲$ و $a-۱\geq ۱$. لــذا: $a-۱\in N$ و $p(a-۱)$ درســت اســت (زیرا a کوچک‌ترین عددی بود که به ازای آن $p(n)$ نادرســت اســت). بنابراین به موجب فرض مســئله، درســتی $p(k)$ درســتی $p(k+۱)$ را نتیجــه می‌دهد: $p(a-۱+۱)$ هم درســت است و یعنی $p(a)$ درست است و این تناقض محسوب می‌شود. زیرا قبلاً فرض شده بود که $p(a)$ نادرست است! پس درستی قضیه ثابت شد.

نتیجه: برای اثبات یک حدس استقرایی باید دو قدم زیر را برداریم:

قدم ۱. درستی حکم را به ازای $n=۱$ تحقیق می‌کنیم.

قدم۲. درســتی حکم را بــه ازای $n=k$ فــرض می‌گیریم (فرض اســتقرا) و سپس درستی حکم را به ازای $n=k+۱$ اثبات می‌کنیم (حکم اســتقرا). برای اثبات حکم استقرا از روی فرض در مسائل گوناگون روش‌های مختلفی وجــود دارند. به مثال‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱. جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی (تصاعد حسابی) را حدس بزنید و حدس خود را با قضیهٔ استقرای ریاضی اثبات کنید.

حل: می‌دانیم دنبالهٔ (تصاعد) حســابی دنباله‌ای اســت که هر جملهٔ آن بــا افزودن مقــداری ثابت (قدرنســبت) به جملهٔ قبلی به‌دســت می‌آید. اگر قدرنســبت این دنباله d باشــد، جملهٔ دوم آن برابر اســت با جمله اول به اضافهٔ قدرنســبت: $a_۲=a_۱+d$ و جملهٔ ســوم برابر است بــا: $a_۳=a_۲+d=a_۱+۲d$، و $a_۴=a_۳+d=a_۱+۳d$ و... و حــدس می‌زنیــم:

$a_n=a_1+(n-1)d$. حال به کمک قضیهٔ اســـتقرای ریاضی این حدس را ثابت می‌کنیم:

$$n=1: a_1=a_1+(1-1)d \Rightarrow a_1=a_1 \quad \text{(شروع استقرا)}$$

$$n=k: a_k=a_1+(k-1)d \quad \text{(فرض استقرا)}$$

$$n=k+1: a_{k+1}=a_1+kd \quad \text{(حکم استقرا)}$$

برای اثبات حکم از روی فرض (که به آن گذر استقرایی می‌گوییم) کافی است بنویسیم:

$$a_{k+1}=a_k+d \overset{\text{فرض}}{\underset{\text{استقرا}}{\Longrightarrow}} a_{k+1}=a_1+(k-1)d+d$$
$$=a_1+(k-1+1)d$$
$$=a_1+kd$$

و به این ترتیب گذر استقرایی انجام شده و حکم ثابت شده است.

مثـال ۲. حاصل‌ضــرب زیر را حدس بزنید و حــدس خود را با قضیهٔ استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})...(1+\frac{1}{n})=?$$

حل: اگر این حاصل‌ضرب را P_n بنامیم، داریم:

$$P_1=1+\frac{1}{1}=2, P_2=(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})=2\times\frac{3}{2}=3$$

$$P_3=(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})=2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}=4$$

و احتمالاً حدس می‌زنیم: $P_n=n+1$ یعنی:

$$(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})...(1+\frac{1}{n})=n+1$$

حال این حدس را اثبات می‌کنیم:

$$n=1: 1+\frac{1}{1}=1+1 \Rightarrow 2=2 \quad \text{(شروع استقرا)}$$

$$n=k: (1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})...(1+\frac{1}{k})=k+1 \quad \text{(فرض استقرا)}$$

$$n=k+1: \underbrace{(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})...(1+\frac{1}{k})}_{k+1}(1+\frac{1}{k+1})=k+2 \quad \text{(حکم استقرا)}$$

برای اثبات حکم از روی فرض، کافی است به جای حاصل‌ضرب k جملهٔ (پرانتز) نخســت، از فرض معادل آن را جایگزین کنیم (یا اینکه دو طرف فرض را در $1+\frac{1}{k+1}$ ضرب کنیم):

$$(k+1)(1+\frac{1}{k+1})=k+1+1=k+2$$

و بنابراین گذر استقرایی کامل و حکم اثبات می‌شود.

مثال ۳. ثابت کنید n دایره در صفحه، صفحه را به حداکثر n^2-n+2 ناحیهٔ مجزا تفکیک می‌کنند.

اثبـات: بــه ازای $n=1$ ، $n^2-n+2=2$. یعنی یک دایره صفحه را به دو ناحیهٔ مجــزا (درون و بیرون دایره) تفکیــک می‌کند. فرض می‌کنیم k دایره، صفحه را به حداکثر k^2-k+2 ناحیهٔ مجزا تفکیک کنند (فرض اســتقرا). حال یک دایرهٔ دیگر به ایــن دایره‌ها اضافه می‌کنیم. بدیهی است، در صورتی تعداد نواحی تفکیک شده حداکثر می‌شود که دایرهٔ k+1ام همــهٔ k دایرهٔ قبلی را در دو نقطه قطع کند (تبدیل یک دایره به دو دایره، و دو دایره به سه دایره را به‌یاد بیاورید). پس از برخورد این دایــره با هر یک از k دایرهٔ قبلی، دو ناحیهٔ جدید به‌وجود می‌آید و در مجموع 2k ناحیه اضافه می‌شود. پس تعداد نواحی که از برخورد k+1 دایره به‌وجود می‌آید برابر است با:

$$(k^2-k+2)+2k=(k^2+2k+1)-(k+1)+2$$
$$=(k+1)^2-(k+1)+2$$

به این ترتیب درســتی حکم به ازای n=k+1 هم ثابت شد و گذر استقرایی کامل است.

تمرین

۱. جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت q را حدس بزنید و حدس خود را با قضیهٔ اســتقرای ریاضی ثابت کنید.

۲. مجموع زیر را حدس بزنید و حدستان را اثبات کنید:

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^n}$$

۳. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم: $2^n>2n-1$.

۴. ماتریــس دودردوی $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ مفــروض اســت. ماتریس‌های $(A\times A)A^2$، A^3 و A^4 را تشــکیل دهید. ســپس برای A^n حدس بزنید و درستی این حدس را اثبات کنید.

۵. برای دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+b^{n-1})$$

۶. بررسی کنید که یک خط راست، دو خط راست متقاطع، سه خط راست دوبه‌دو متقاطع و چهار خط راست دوبه‌دو متقاطع صفحه را به چند ناحیه تفکیک می‌کنند. سپس حدس بزنید که n خط راســت دوبــه‌دو متقاطع صفحه را بــه چند ناحیه تفکیک می‌کنند و حدس خود را اثبات کنید.

۷. مســئلهٔ «جزیرهٔ گنگ‌ها» را از شــمارهٔ قبل به یــاد بیاورید. آیا می‌توانید حدس استقرایی زده شده را اثبات کنید؟